Zur Relation zwischen Minkowskikraft und Newtonscher Kraft

Torsten Fließbach

Zusammenfassung In der Literatur findet man unterschiedliche Angaben zur Relation zwischen der Minkowskikraft und der Newtonschen Kraft. Wir diskutieren diese Angaben im Hinblick auf ihre mögliche Begründung und ihre praktische und logische Relevanz. Um die korrekte Relation zu erhalten, muss der Newtonsche Grenzfall exakt angesetzt werden. Die Ersetzung der Masse m durch die "relativistische Masse" γm ist kein allgemeingültiges Rezept für die Aufstellung der relativistischen Bewegungsgleichungen.

1. Verschiedene Versionen

Die Dynamik eines Massenpunkts wird im nichtrelativistischen Fall durch die Newtonsche Kraft $\boldsymbol{F}_{\rm N}$ bestimmt, und im relativistischen Fall durch die Minkowskikraft (auch Viererkraft genannt) $(F^\alpha) = (F^0, \boldsymbol{F})$. In der Literatur findet man nun zwei verschiedene Angaben für die Relation zwischen diesen Kräften. Für die räumlichen Komponenten lauten diese Alternativen:

$$\text{Version A:} \qquad \boldsymbol{F} = \gamma\, \boldsymbol{F}_{\rm N} \tag{1}$$

$$\text{Version B:} \qquad \boldsymbol{F} = \gamma\, \boldsymbol{F}_{{\rm N}\parallel} + \boldsymbol{F}_{{\rm N}\perp} \tag{2}$$

Dabei ist $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, und in (2) werden die Anteile parallel und senkrecht zur Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ des Teilchens unterschieden. Die charakteristischen Merkmale dieser beiden Versionen sind die gleiche (A) und die unterschiedliche (B) Behandlung der Kraftkomponenten.

Einige Quellen für diese Versionen sind:

- Version A: Schmutzer[1], Ruder[2], Goenner[3], Nolting[4]
- Version B: Weinberg[5], Fließbach[6], Scheck[7], Rebhan[8]

Im Folgenden sollen die Alternativen A und B im Hinblick auf ihre mögliche Begründung und auf ihre Relevanz untersucht werden.

[1] E. Schmutzer, *Grundlagen der Theoretischen Physik*, BI-Verlag 1989, Gleichung (6.7.4)
[2] H. und M. Ruder, *Die Spezielle Relativitätstheorie*, Vieweg 1993, Gleichung (6.10)
[3] H. Goenner, *Spezielle Relativitätstheorie*, 1. Auflage, Elsevier/Spektrum 2004, Gleichung (4.29)
[4] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 4: Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik*, 8. Auflage, Springer 2012, Gleichung (2.47)
[5] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley 1972, Gleichung (2.3.5)
[6] T. Fließbach, *Mechanik*, 6. Auflage, Spektrum 2009, Gleichung (38.17)
[7] F. Scheck, *Mechanik*, 5. Auflage, Springer 1996, Gleichung (4.80)
[8] E. Rebhan, *Theoretische Physik*, Band 1, Spektrum 1999, Gleichung (20.18)

2. Version A

Eine mögliche Begründung für die Version A geht von der Bewegung im elektromagnetischen Feld aus. In der Newtonschen Mechanik wirkt auf ein Teilchen (Masse m, Ladung q) die Lorentzkraft:

$$m\,\frac{d\,\boldsymbol{v}(t)}{dt} = q\,\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B}\right) \qquad (v \ll c) \tag{3}$$

Die korrekte relativistische Gleichung kann in der Form

$$\frac{d}{dt}\,\frac{m\,\boldsymbol{v}(t)}{\sqrt{1-v(t)^2/c^2}} = q\,\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B}\right) \tag{4}$$

geschrieben werden. Aus dem Vergleich mit der äquivalenten lorentzinvarianten Form $m\,du^\alpha/d\tau = F^\alpha$ (mit $u^i = \gamma v^i$ und $d\tau = dt/\gamma$) folgt der räumliche Anteil der Minkowskikraft:

$$\boldsymbol{F} = \gamma\,q\,\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B}\right) \tag{5}$$

Wenn man nun die rechte Seite der Newtonschen Gleichung (3) mit $\boldsymbol{F}_{\rm N}$ gleichsetzt, dann erhält man Gleichung (1), also die Version A.

Gelegentlich wird die "relativistische Masse"

$$\widetilde{m} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{6}$$

eingeführt. Wenn man (3) in der Form $d(m\,\boldsymbol{v})/dt = \ldots$ schreibt und m durch $\widetilde{m}$ ersetzt, dann erhält man die gültigen relativistischen Gleichungen (4). Daher wird diese Ersetzung häufig als Rezept zur Aufstellung der relativistischen Gleichungen angegeben. Die Gültigkeit dieses Rezepts korreliert mit der von Version A.

3. Version B

Die im letzten Abschnitt angeführte Argumentation für die Version A hat folgendes Problem: Gleichung (3) ist zwar eine legitime Newtonsche Gleichung, sie ist aber nicht der Newtonsche Grenzfall $v \to 0$. Im Newtonschen Grenzfall gilt

$$m\,\frac{d\,\boldsymbol{v}'}{dt'} = q\,\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{F}_{\rm N} \qquad (v' \to 0) \tag{7}$$

Dabei ist $\boldsymbol{E}'$ das elektrische Feld im momentanen Ruhsystem IS$'$ des betrachteten Teilchens. Es gilt $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v}/c)\times\boldsymbol{B} + \mathcal{O}(v^2/c^2)$. Die Kräfte in (3) und (7) unterscheiden sich also durch Terme der relativen Größe v^2/c^2. Im Rahmen der Newtonschen Mechanik sind solche Kräfte gleichwertig. Eine Beziehung der Art (1) oder (2) erfordert aber eine exakte Festlegung der Newtonschen Kraft. Hierfür ist der Newtonsche Grenzfall $v \to 0$ die eindeutige und adäquate Festlegung. Daher bezeichnen wir die Kraft $q\,\boldsymbol{E}'$ in (7) als Newtonsche Kraft $\boldsymbol{F}_{\rm N}$.

Die Transformation der Felder vom momentanen Ruhsystem IS$'$ zu dem IS, in dem sich das Teilchen mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ bewegt, ist bekannt[9]

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}'_{\parallel} + \boldsymbol{E}'_{\perp} = \boldsymbol{E}_{\parallel} + \gamma \left(\boldsymbol{E}_{\perp} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B} \right) \tag{8}$$

Hier wurde zwischen den zur Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ parallelen und senkrechten Anteilen unterschieden. Um von der Newtonschen Kraft $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} = q\boldsymbol{E}'$ zur Minkowskikraft $\boldsymbol{F} = \gamma q (\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v}/c) \times \boldsymbol{B})$ zu kommen, muss der parallele Anteil mit γ multipliziert werden. Damit erhält man Gleichung (2), also die Version B.

Wenn man (7) in der Form $d(m\,\boldsymbol{v}')/dt' = \ldots$ schreibt und m durch $\widetilde{m}$ ersetzt, dann erhält man *nicht* die gültigen relativistischen Gleichungen (4). Die Ersetzung $m \to \widetilde{m}$ ist daher kein allgemeingültiges Rezept. Davon abgesehen spiegelt die “relativistische Masse“ wesentliche Züge der relativistischen Bewegung durchaus richtig wider, wie etwa eine divergierende Trägheit für $v \to c$.

4. Formale Ableitung

Wir leiten die Beziehung zwischen Newtonscher Kraft und Minkowskikraft jetzt allgemein ab, also ohne den Bezug auf den elektromagnetischen Fall.

Die grundlegende Überlegung für die Aufstellung relativistischer Gesetze ist: Im Grenzfall $v \to 0$ sind die Newtonschen Gleichungen auch *relativistisch* gültig. Aus diesen gültigen Gleichungen ergibt dann eine Lorentztransformation (LT) vom momentanen Ruhsystem IS$'$ in ein beliebiges Inertialsystem (IS) die relativistischen Gleichungen.

In der Regel wird diese Argumentation so benutzt: Man stellt die lorentzinvarianten Gleichungen auf, die sich für $v \to 0$ auf den Newtonschen Grenzfall reduzieren. Die lorentzinvarianten Gleichungen

$$m\,\frac{du^{\alpha}}{d\tau} = F^{\alpha} \tag{9}$$

ergeben im Grenzfall $v \to 0$ die Newtonsche Form

$$m\,\frac{dv'^{i}}{dt'} = F'^{i} \qquad \text{in IS}' \tag{10}$$

Damit sind (9) die gültigen Gleichungen, wenn

$$\big(F'^{\alpha}\big) = \big(0,\, F'^{i}\big) = \big(0,\, \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}\big) \tag{11}$$

Die Kraftkomponenten im Newtonschen Grenzfall (10) wurden zur Newtonschen Kraft $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ zusammengefasst. Die Minkowskikraft F^{α} in (9) ergibt sich hieraus mit Hilfe der bekannten Lorentzrücktransformation $F^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\ \beta}(-\boldsymbol{v})\, F'^{\beta}$. Das Ergebnis ist[10]

$$\big(F^{\alpha}\big) = \big(F^{0},\, \boldsymbol{F}\big) = \left(\gamma\,\frac{v\,F_{\mathrm{N}\parallel}}{c}\,,\ \gamma\,\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}\parallel} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}\perp} \right) \tag{12}$$

Damit ergibt sich aus der formalen Ableitung die Aussage (2), also die Version B.

[9] T. Fließbach, *Elektrodynamik*, 6. Auflage, Springer Spektrum 2012, Kapitel 22
[10] T. Fließbach, *Mechanik*, 6. Auflage, Spektrum 2009, Kapitel 38

5. Wertung

Akademische Aspekte

Die Argumentation in Abschnitt 2 beruht auf zwei Ungenauigkeiten: Zum einen ist (3) nicht der Newtonsche Grenzfall $v \to 0$, und zum anderen ist Gleichung (1) nur in einem speziellen Kontext richtig. Beide Punkte ergänzen sich aber gerade so, dass sie zu den korrekten relativistischen Aussagen (4) und (5) führen.

Diese Kritik hat akademische Züge: Zunächst ist (3) ja eine korrekte Newtonsche Gleichung (nur eben nicht der Grenzfall $v \to 0$). Für konkrete Rechnungen ist (3) die bevorzugte Gleichung; der Grenzfall (7) ist hierfür eher unpraktisch. Relativistische Gleichungen werden in der Regel ohne den expliziten Bezug zum Newtonschen Grenzfall aufgestellt. Und konkrete Anwendungen sind durchweg unabhängig von der hier diskutierten Frage A oder B. Insofern ist die Frage A oder B ohne praktische Relevanz.

Logische Aspekte

In der Theoretischen Physik verwendet man folgende Logik für die Verallgemeinerung von Gesetzen:

- In einem Spezialfall ist das Gesetz bekannt.
- Man kennt die Transformationen vom Spezialfall zum allgemeinen Fall.

Ein erstes Beispiel für dieses Vorgehen ist die hier diskutierte Aufstellung der relativistischen Bewegungsgleichungen. Der Spezialfall ist der Newtonsche Grenzfall ($v \to 0$), und die Transformationen sind die Lorentztransformationen. Praktisch bestimmt man eine lorentzinvariante Gleichung, die im Grenzfall mit dem bekannten Gesetz übereinstimmt (Abschnitt 4).

Ein zweites Beispiel für dieses Vorgehen ist die Aufstellung von relativistischen Gesetzen mit Gravitation. Der Spezialfall ist das Lokale Inertialsystem (mit der Minkowskimetrik, also konkret ein freifallendes Satellitenlabor). Die bekannten Gesetze sind die Gesetze der Speziellen Relativitätstheorie (SRT). Die Transformationen sind allgemeine Koordinatentransformationen. Praktisch bestimmt man die allgemein kovariante Gleichung, die sich für die Minkowskimetrik auf das bekannte SRT-Gesetz reduziert.

Diese Skizze der Aufstellung von Gesetzen der Allgemeinen Relativitätstheorie soll Folgendes klar machen: Die Logik zur Aufstellung allgemeinerer Gesetze ist in der Theoretischen Physik von grundlegender Bedeutung. In dieser Logik muss der bekannte Spezialfall exakt definiert werden. Insofern ist die Frage A oder B von logischer Relevanz für den Aufbau der Theoretischen Physik.